



د افغانستان اسلامي امارت
لوړو زده کړو وزارت
لوگر د لوړو زده کړو موسسه
علمي او محصلانو چارو معاونیت
د څېړنو او علمي مجلې آمریت



مجله علمی - تحقیقی **عینک** علمی - څېړنیزه مجله

دویم کال / سال دوم

کال / سال: خزان ۱۴۰۳ ه.ش / ۱۴۴۶ ه.ق

گڼه / شماره: ۳

سورة الفجر

د عینک علمی - څېړنیزه شپږ میاشتني مجله

دو فصلنامه علمی - تحقیقی عینک

لوگر د لوړو زده کړو مؤسسې د عینک علمی - څېړنیزه مجله؛ دویم کال، درېیمه گڼه، د ۱۴۰۳ لمریز کال خزان. د څېړنې، تألیف او ژباړې ریاست لخوا د خپرېدو جواز او د ثبت شمېره ۰۰۱۵-۲۳ په ۱۴۰۲/۳/۱۳ نېټه د هجري شمسي کال.

صاحب امتیاز: مؤسسه تحصیلات عالی لوگر

سردیوان: پوهندوی دوکتور وحیدالله عبدالرحیم زی و پوهندوی دوکتور محمد سرور حقپرست

مدیر مسئول: پوهنیار عبدالعزیز عابد

دیزاینر: پوهندوی دوکتور وحیدالله عبدالرحیم زی

تعداد چاپ: ۱۵۰ جلد

ایمیل آدرس: ainakjournal@gmail.com

وبسایت: <https://logu.edu.af>

کتنپلاوی

طبیعی علوم

۱. پوهنوال عبدالرحمن عثمانی

۲. پوهنوال نذیر خان محمدي

۳. پوهندوی محمد داود شیرزاد

۴. پوهنمل دوکتور محمد داود احمدزی

۵. پوهنمل دوکتور کیومرث پولادیان

۶. پوهنمل محمد رحیم رحيمي

۷. پوهنمل عبدالمقیم حسيني

۸. پوهنیار عبدالصبور فیضي

ټولنیز علوم

۱. پوهنوال دوکتور رحیم الله څیرک

۲. پوهندوی امام الدین ابراهيمي

۳. پوهندوی میرویس ستانکزی

۴. پوهندوی دوکتور فهیم رحيمي

۵. پوهنمل محمد طاهر خپلواک

۶. پوهنمل احمد ولي عالمي

۷. پوهنیار احمد غبور یوسفزی

۸. پوهنیار یحیی حقمل

آدرس: ولایت لوگر، مقابل کارته مامورین، مؤسسه تحصیلات عالی لوگر.

لوگر د لوړو زده کړو موسسې د رئیس پیغام

بسم الله الرحمن الرحيم
حامداً و مصلیاً بعد:

په ټولو دنيوي او اخروي چارو کې د بشریت بريا او نیکمرغي د شرعي او ټکونيني علومو له زده کولو او عملي کولو سره تړلې ده. قومونه او نظامونه هلته د خپل دين، خاورې، حریت، برم او ارزښتونو ساتنه کولای شي، چې وگړي يې د ديني او عصري علومو په ګاڼه سمبال وي. زموږ ګران هېواد، چې تازه يې د امن ساه اخيستې او د يرغلګرو له منګولو ازاد شوی؛ خو له ګڼو ستونزو سره لاس او ګريوان دی. د ستونزو د لمنځه وړلو لپاره اړينه ده، چې علمي څېړنې ترسره شي او علمي څېړنې د پرمختګ، نوښتونو، هوساينې، پراختيا او حقيقت ته د رسيدو بنسټ ګڼل کېږي. په دې برخه کې د نورو ښوونيزو ادارو ترڅنګ پوهنتونونه او د لوړو زده کړو موسسې ځانګړی رول لري. لوگر د لوړو زده کړو موسسه هم له هغو اکاډميکو ادارو څخه ده، چې د محصلانو د سالمې روزنې ترڅنګ علمي څېړنې هم خپل مسؤليت او مکلفيت ګڼي او تل هڅه کوي، چې په بېلابېلو برخو کې د متخصصو، متدينو او ژمنو کادرونو د روزلو سربېره د ګران هېواد د بيارغونې او هېوادوالو د هوساينې لپاره د وخت له اړتيا سره سم علمي څېړنې ترسره کړي، د همدې هڅو په دوام د دې علمي کانونو د څېړنو او علمي مجلې آمریت د زیارکښو مسؤولينو په کوښښ او هڅه د عینک علمي - څېړنیزې شپږ میاشتني مجلې درېیمه ګڼه هم د علمي څېړنو مینه والو ته وړاندې شوه. له ټولو هغو زیارکښو مسؤولينو څخه مننه کوم، چې د دې څېړنیزې علمي مجلې د موادو په چمتو کولو کې يې نه سترې کېدونکې هڅې کړې دي، الله تعالی دې د دوی لپاره ياده علمي مجله تل پاتې صدقه او د آخرت توبنه وګرځوي.

په درنښت!

مفتي سيد ضياء الاحمد صارم
لوگر د لوړو زده کړو موسسې رييس
۱۴۴۶ / جمادی الثاني

ليکلو

د طبيعې علومو برخه

- ٥..... تحليل خطا روش‌های عددی رانگ‌کوتاه تصادفی و ميلشتاين
- ٢٠..... دفاع نباتات و ميكانيزم عمل آن در مقابل عوامل مرض زا
- په خوست ښار کې د شيدو له پرچون پلورنځيو څخه ترلاسه شويو تازه شيدو کې د اوبو او
- ٣٦..... نشايستې تقلب خپل
- ٤٨..... د افغانستان خوست ولايت مرکز اړوند سيمو وزو کې Schistomiasis د واقعاتو څېړنه
- د خوست متون او صبريو ولسوالي د غوښينو چرگانو په فارمونو کې د Infectious bronchitis
- ٦٠..... ناروغۍ د واقعاتو څېړنه
- ٧٣..... هوسۍ د غوښې روغتيايي او غذايي ارزښت
- ٨٧..... بررسۍ نقش بازاریابی محصولات زراعتی در اقتصاد دهقانان مرکز ولايت فراه
- ١٠١..... د چينايي مالگې کيمياوي ترکيب او د فقهاوو له نظره يې د کارونې مشروعيت
- ١١٣..... نقش کاربوهيدريت‌هابالای ارگانيزم زنده

د ټولنيزو علومو برخه

- په اسلامي فقه او د افغانستان په قوانينو کې د تاليف او اختراع په حقوقو د تېري اړونده احكامو
- ١٢٧..... څېړنه
- ١٥٠..... بررسۍ استشراف و تأثير آن بر جامعه اسلامی
- د مجرم بندي کولو او په تعزيري دُرو وهلو جزاگانو ترمنځ پرتله ييزه علمي او اقتصادي
- ١٧٢..... څېړنه
- ١٨٤..... د جُمعې د ورځې او لمانځه احکام

بخش

علوم طبیعی



تحلیل خطا‌های عددی رانگ کوتاه تصادفی و میلشتاین

پوهنمل دکتور توفیق الله ایوبی

دیپارتمنت ریاضی، پوهنځی علوم طبیعی پوهنتون تعلیم و تربیه کابل. کابل: افغانستان.

ایمیل آدرس: tawfiqullah.ayoubi@yahoo.com

چکیده

بیان مسأله: بیشترین معادلات دیفرانسیل تصادفی حل تحلیلی ندارد، ناگزیر هستیم که برای حل این معادلات راه حلی جستجو کنیم.

هدف تحقیق: در این پژوهش روش‌های عددی میلشتاین، رانگ کوتاه تصادفی و مقایسه این دو روش برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی به بررسی گرفته شده است؛

روش تحقیق: برای محاسبه معادلات دیفرانسیل تصادفی نمی‌توانیم از انتیگرال ریمان و لبگ کارگرفت؛ زیرا که این مدل ریاضی از معادله دیفرانسیل معمولی با فرآیند وینر تشکیل شده است. جهت رفع مشکل این مسأله از انتیگرال ایتو کار گرفته می‌شود.

یافته‌ها: اساس دقیق بودن این معادلات را دخالت نوفه سفید تشکیل می‌دهد؛ زیرا نوفه سفید دارای بی‌نهایت داده‌های است که در جریان فرآیند مدل ریاضی از این داده‌ها را به‌طور تصادفی انتخاب می‌کند.

نتیجه‌گیری: از این تحقیق برمی‌آید که بهترین روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی، روش عددی رانگ کوتاه تصادفی بوده؛ زیرا خطای این روش نسبت به روش عددی میلشتاین کمتر است.

واژه‌گان کلیدی: انتیگرال ایتو، رانگ کوتاه، معادلات دیفرانسیل تصادفی، میلشتاین و نوفه سفید.

مقدمه

معادلات دیفرانسیل تصادفی از معاصر معادلات دیفرانسیل بوده که بنیادگذار این معادله ریاضی دان جاپانی به نام ایتو (۱۹۱۵-۲۰۰۸) می باشد. این معادلات در چند دهه اخیر به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است و معادلات مذکور به دو بخش عمده تقسیم بندی شده اند:

۱. معادلات دیفرانسیل تصادفی Stochastic Differential Equations
۲. معادلات دیفرانسیل تصادفی با تأخیر زمان Stochastic Delay Differential Equations

در این مقاله پژوهشی تنها روش های عددی میلشتاین و رانگ کوتاه تصادفی معادلات دیفرانسیل تصادفی به بررسی گرفته شده است. به این دلیل که معادلات مذکور حل تحلیلی ندارد (Ayoubi, 2015). ریمیولاین در سال ۱۹۸۲ برای اولین بار روش عددی برای حل تقریبی معادله دیفرانسیل تصادفی ارائه کردند. بنابراین روش های که می توان معادلات مذکور را به واسطه آن حل نمود روش های عددی چون، رانگ کوتاه تصادفی، اوایلر و میلشتاین است (Burrage, et al., 2004). چون فرآیند جواب این دسته از معادلات شامل فرآیند وینر می باشد و به شکل تابع مشخص از زمان موجود نیست. مجبوریم مسیر جواب ها را شبیه سازی کنیم. برای این کار نیاز به اعداد تصادفی است و برای این منظور از مولدهای تولید اعداد شبیه شده استفاده می کنیم. معادلات دیفرانسیل معمولی همراه فرآیند وینر، به نام معادلات دیفرانسیل تصادفی یاد می شوند

(Yang, et al., 2023; Sobczyk, 2013; Ikeda and Watanabe, 2014; Kuo, 2006). این نوع معادلات در مدل سازی پدیده های اجتماعی چون زیست شناسی (Michelot, et al., 2021)، بازرگانی (Sharp, 1990)، علوم طبیعی (Kostrista, and Çibuku, 2018) چون فرآیند تخمیر (Bradford and Imsland, 2019)، بیولوژیکی (Braumann, 2019) و شبکه های مخابراتی (Raissi, 2024) و.... نقش بارز را بر عهده دارند. اگر معادله دیفرانسیل تصادفی خطی را در نظر بگیریم، داریم؛

$$x' = \frac{dx}{dt} = a(\omega)x + b(t, \omega), \quad (1)$$

در رابطه (1) b نسبت به t برای هر ω متمادی می باشد و برای هر مقدار اولیه $X_0(\omega)$ در t_0 دارای حل

$$X(t, \omega) = e^{a(\omega)t} \left(X_0(\omega) + \int e^{-a(\omega)s} b(s, \omega) ds \right), \quad (2)$$

می باشد که توابع نسبت به t مشتق پذیرند. نوع دوم معادلات دیفرانسیل تصادفی معادلات که عامل اعمالشان یک فرآیند تصادفی نامنظم؛ مثلاً نوفه سفید گوسی می باشد که معادلات در این حالت توسط دیفرانسیل های تصادفی به طور نمادین نوشته می شوند و توسط معادلات انتیگرالی با

انتیگرال‌های تصادفی ایتو یا استراتونویچ تحلیل می‌گردند که به نام معادلات تصادفی نوع دوم یاد می‌گردند (Burrage, and Platen, 1994; Burrage and Platen, 2004). در حالت کلی حل آن‌ها مشتق ناپذیری را از مسیرهای نمونه فرآیند وینر در انتیگرال تصادفی به ارث می‌برند. شکل عمومی یک معادله دیفرانسیل تصادفی از نوع دوم به صورت زیر است.

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (3)$$

به شکل انتیگرال ایتو چنین است.

$$X_t = X_{t_0} + \int_0^t a(s, X_s)ds + b(s, X_s)dW_s, \quad (4)$$

در رابطه (۴) $a(s, X_s)$ قسمت معمولی، $b(s, X_s)dW_s$ بخش تصادفی و W_s فرآیند وینر است. برای دریافت حل معادله (3) به طور ضمنی فرض می‌کنیم که یک فرآیند وینر مستقل از فرآیند وینر باشند یعنی با تغییر فرآیند وینر یک حل منحصر به فرد توسط همان فرمول‌ها با فرآیند جدید به دست آید؛ چنین جواب‌ها را برای معادله دیفرانسیل تصادفی حل قوی می‌نامند و از اصطلاح جواب ضعیف برای حل معادله وقتی کار می‌گیریم که ما در انتخاب فرآیند وینر آزاد باشیم. برای دریافت حل معادله (4)؛ می‌توان تابع را به عنوان تابع با مقدار اولیه X_{t_0} و مقادیر W_s از فرآیند وینر در فاصله ای $t_0 \leq s \leq t$ در نظر گرفته شود. به این ترتیب برای مقدار اولیه مشخص X_{t_0} حل معادله (۱) برای معادله (2) نیز صدق می‌کند. معادله (2) زمانی دارای حل قوی مانند X_t است که دارای یک جواب معادل جدایی‌پذیر از نوع $\tilde{X}_t$ باشد. معمولاً هر دو جواب در نظر گرفته می‌شود. هر دو جواب در فاصله $[t_0, T]$ متمادی می‌باشد (Chang CC, 1987; Kloeden, P. E. and Platen, 1995).

$$P\left(\sup |X_t - \tilde{X}_t| > 0\right) = 0.$$

این مقاله پژوهشی شامل 4 بخش اساسی می‌باشد: مفاهیم اولیه، تقریب‌های رانگ کوتاه تصادفی، اوایلر و میلشتاین، نتایج عددی و نتیجه‌گیری.

مواد و روش کار

مقاله حاضر از روش تحقیق تجربی (در نرم‌افزار متلب به گام‌های مختلف بیش از ۱۰۰ مرتبه به اجرا درآمده) استفاده می‌کند. در اینجا، توضیحات جامع درباره میلشتاین و رانگ کوتاه تصادفی ارائه شده

و نحوه‌ی کاربرد آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل تصادفی توضیح داده شده است. همچنین، از مولدهای اعداد تصادفی برای شبیه‌سازی فرآیندهای وینر استفاده شده است.

۱- مفاهیم اولیه

فرض کنیم که برای ضرایب $a, b: [t_0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ و مقدار اولیه X_{t_0} شرایط زیر برقرار باشند.

۱. اندازه‌پذیری: $a = a(t, x) \wedge b = b(t, x)$ برای تمام $(t, x) \in [t_0, T] \times \mathcal{R}$

توأم در L^2 اندازه‌پذیر باشند (Burrage & Burrage, 1996).

۲. شرایط لیپ‌شیتس: برای هر $t \in [t_0, T]$ و $x, y \in \mathcal{R}$ یک عدد ثابت مثبت مانند k و جود دارد که روابط زیر را صدق کند (Kloeden and Platen, 1995).

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq k|x - y|,$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq k|x - y|,$$

۳. رشد خطی: برای هر $t \in [t_0, T]$ و $x, y \in \mathcal{R}$ یک عدد ثابت مثبت مانند k و جود دارد که روابط زیر را صدق کند (Kloeden et al., 1995).

$$|a(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2),$$

$$|b(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2),$$

۴. مقدار اولیه: X_{t_0}, A_{t_0} اندازه‌پذیر است طوری که $E\left(\left|X_{t_0}\right|^2\right) < \infty$.

قضیه ۱ (Milstein, 1995):

معادله دیفرانسیل تصادفی (۳) دارای حل قوی منحصر به فرد مسیری X_t در فاصله $t \in [t_0, T]$ با

$$\sup_{t_0 < t < T} E\left(\left|X_t\right|^2\right) < \infty \text{ می‌باشد.}$$

۲- تقریب‌های اوایلر و میلشتاین

ساده‌ترین تقریب‌های گسسته زمان از فرآیند ایتو که برای رابطه (۴) واضح گردیده است، تقریب رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴، اوایلر-ماریاما و میلشتاین می‌باشد. فرض کنیم فرآیند ایتو

$X = \{X_t, t_0 \leq t \leq T\}$ در معادله دیفرانسیل تصادفی (۳) در فاصله $t_0 \leq t \leq T$ با یک

مقدار اولیه $X_{t_0} = X_0$ صدق کند زیرا برای $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \tau_N = T$

یک فاصله زمانی $t \in [t_0, T]$ یک تقریب اوایلر یک فرآیند تصادفی پیوسته بازمان $Y = \{Y(t), t_0 \leq t \leq T\}$ می باشد. در حالت کلی چنین می نگاریم:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1}, \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}}, W_{\tau_n}),$$

البته برای $n = 0, 1, \dots, N-1$ با مقدار اولیه $Y_0 = X_0$ صادق می باشد، که منظور از $Y_n = Y(\tau_n)$ است. معمولاً از تساوی $\Delta_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ برای n ام افزایش زمان و $\delta = \max_n \Delta_n$ اعظمی ترین طول گام می نامند. اگر طول گام ها باهم مساوی باشند، پس داریم:

$$\delta = \Delta_n = \Delta = \frac{T - t_0}{N} \text{ که } \tau_n = t_0 + n\delta \text{ جایی می باشد (Chang, 1987).}$$

ترادف $\{Y_n, n = 0, 1, \dots, N\}$ از مقادیر تقریب اوایلر در زمان های مساوی $(\tau)_\delta = \{Y_n, n = 0, 1, \dots, N\}$ می تواند مشابه به روش اوایلر محاسبه گردد با این تفاوت که در این جا نیاز به تولید نمونه های تصادفی $W_n = (W_{\tau_{n+1}}, W_{\tau_n})$ برای $n = 0, 1, \dots, N$ فرآیند $W = \{W_t \geq 0\}$ است.

این نمونه ها متحول های گوسی مستقل با امید $E(\Delta W_n) = 0$ و واریانس $E((\Delta W_n)^2) = \Delta_n$ می باشند که می توان آن ها را از یک ترادف از اعداد گوسی مستقل شبه- تصادفی؛ مثلاً از روش باکس مولر تولید کرد

(Milatein, 1995; Arifha, 2005 and Higham, 2001).

در نتیجه مقادیر تقریبی فرآیند را در زمان های گسسته تعیین می کنیم و از یک روش درونیابی مناسب مانند خطی می توان استفاده کرد و مقادیر تقریبی فرآیند در بین فاصله ها را به دست آورد. اگر لیمت

$$L^1 b(t_0, W_{t_0}) \int_0^t \int_0^N dW_z dW_s$$

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb' \{(\Delta W)^2 - \Delta\}, \quad (5)$$

برای حل عدد معادلات دیفرانسیل تصادفی به دست می آید.

۳- روش عددی رانگ کوتاه تصادفی برای حل تقریبی معادله تفاضلی تصادفی

برای این که معادلات تفاضلی تصادفی تحلیلی ندارد ناگزیریم از حل عددی برای تقریب جواب های این معادلات کار گرفت. برای حل عددی این معادلات سه روش مهم وجود دارد.

۱. میلشتاین برای معادله تفاضلی تصادفی از نوع Stratonovich که ترتیب مقاربت آن (۱,۰) است.

۲. رانگ کوتاه تصادفی این روش در سال (۱۹۸۲) توسط Rumellin به اساس افزایش فرآیند وینر پیشنهاد گردید و شکل عمومی آن برای حل معادله طور زیر است.

$$Y_i = Y_n + \Delta \sum_{j=1}^s a_{ij} f(Y_j^n) + J_\backslash \sum_{j=1}^s b_{ij} g(Y_j), \quad i = 1, 2, \dots, s \quad (6)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta \sum_{i=1}^s \alpha_i f(Y_i^n) + J_\backslash \sum_{i=1}^s \gamma_i g(Y_i)$$

در معادله (6) $\mathbf{A} = (a_{ij})_{s \times s} \wedge \mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times s}$ مترکس ها دارای عناصر حقیقی از مترکس ها آند. مؤلفه اتفاقی آن از انتگرال $J_\backslash$ به دست می آید. رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ (6) نمی تواند بهتر از ترتیب مقاربت باشد (Bastani and Hosseini, 2007).

ازاین رو، (Burrage and Burrage, 1996) فورمول جدید رانگ کوتاه تصادفی مرتبه 4 به

اساس مؤلفه انتگرال تصادفی $J_\backslash$ و $\frac{J_\backslash}{\Delta}$ پیشنهاد کرد. بنابراین، فورمول عمومی رانگ کوتاه تصادفی مرتبه 4 برای حل تقریبی معادله مساوی است به:

$$Y_i^n = Y_n + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(0)} f(Y_j) + \sum_{j=1}^s Z_{ij}^{(1)} g(Y_j), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^s z_i^{(0)} f(Y_i) + J_1 \sum_{i=1}^s z_i^{(1)} g(Y_i) \quad (7)$$

قیمت های $Z_{ij}^{(0)}, Z_{ij}^{(1)}, z_i^{(0)} \wedge z_i^{(1)}$

$$Z_{ij}^{(0)} = \Delta a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, s \quad (8)$$

$$Z_{ij}^{(1)} = \sum_{l=1}^q b_{ij}^{(l)} \theta_l, \quad i, j = 1, \dots, s \quad (9)$$

$$z_i^{(0)} = \Delta \alpha_i, \quad i = 1, \dots, s \quad (10)$$

$$z_i^{(1)} = \sum_{l=1}^q \gamma_i^{(l)} \theta_l, \quad i = 1, \dots, s \quad (11)$$

همراه با ترتیب مقاربت (1,0) و (1,5) با در نظر داشت $q=2$ ، $J_{\gamma} = J_{\gamma} \wedge \theta_{\gamma} = \frac{J_{\gamma}}{\Delta}$ ، در حالی که

رانگ کوتاه تصادفی مرتبه 4

$$J_{10} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^t dW(s) dt$$

قیمت تقریبی

$$\frac{J_{10}}{\Delta} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \left(N_1 + \frac{N_2}{\sqrt{3}} \right) \quad (12)$$

در رابطه (12) $N_{\gamma} \wedge N_{\gamma}$ توزیع نورمال گووس و واریانس آن مساوی به یک است بنابراین

ترتیب S یی رانگ کوتاه تصادفی مرتبه 4 مساوی است به:

$$Y_i = y_n + \Delta \sum_{j=1}^s a_{ij}^{(0)} f(Y_j) + \sum_{j=1}^s \left(b_{ij}^{(1)} J_1 + b_{ij}^{(2)} \frac{J_{10}}{\Delta} \right) g(Y_j), \quad i=1,2,\dots,s$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta \sum_{i=1}^s \alpha_i^{(0)} f(Y_i) + \sum_{i=1}^s \left(\gamma_i^{(1)} J_1 + \gamma_i^{(2)} \frac{J_{10}}{\Delta} \right) g(Y_i) \quad (13)$$

از فورمول (13) روش رانگ کوتاه تصادفی که ترتیب مقاربت (1,5) است به دست آورد. بنابراین

روش مذکور به نام مرتبه 4 رانگ کوتاه تصادفی مسماست و طور زیر بیان می شود (Rosli,2012).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & & \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -0.7242916356 & & & & \\ 0.423735346 & -0.199443705 & & & \\ -1.078475506 & 0.8401003400 & 1.738375163 & & \end{bmatrix}$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2.700200041 & 0 & 0 & 0 & \\ 1.7057261649 & 0 & 0 & 0 & \\ -2.918524118 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\alpha^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{(1)T} &= [-0.780, 0.788474 \quad 0.0736376824, \\ &\quad 1.48602, 0.13, \quad 0.2199211024,] \\ \gamma^{(2)T} &= [1.69390, 0.8440, \quad 1.6361, 0.7882, \\ &\quad -3.024, 0.9058 \quad -0.306, 0.4916, 0.2] \end{aligned}$$

(Rosli, 2012) نشان داد که این روش عملکرد بهتر برای حل تقریبی معادله تفاضلی تصادفی نسبت دو روش دیگر دارد.

۵. معیارهای مقاربت

اگر ثابت C برای هر $\delta \in (0,1)$ و $\lambda > 0$ از مرتبه X حل قوی $Y^\delta = \{Y(t), t \geq 0\}$ $\delta \in (0,1)$ متقارب است و برای داریم:

$$\varepsilon = E(|X_T - Y^\delta(T)|) \leq C\delta^\gamma,$$

و تقریب Y^δ ، جواب X به طور ضعیف از مرتبه $\beta > 0$ متقارب است. اگر برای هر چند جمله g یک ثابت نامعلوم C_g موجود باشد که برای هر $\delta \in (0,1)$ داشته باشیم:

$$|E(g(X_T)) - E(g(Y^\delta(t)))| \leq C_g \delta^\beta,$$

در حالت قوی تقریب Y^δ فرآیند ایتو را به طور مسیری تقریب می کند درحالی که در حالت ضعیف تقریب Y^δ فرآیند ایتو را از جهت بعضی از توابع، چون (Torques)، تقریب می کند (Milstein, 1995; Rößler, 2010).

یادداشت ۱: هویداست که شرایط مقاربت روش میلشتاین $\gamma = 1$ و از روش رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴، $\gamma = 1.5$ می باشد.

۶- نتایج عددی

فرض کنیم فرآیند ایتو $X = \{X_t, t \geq 0\}$ در معادله دیفرانسیل تصادفی خطی

$$dX_t = aX_t dt + bX_t dW_t, \quad (15)$$

برای $t \in [0, T]$ با مقدار اولیه $X_0 \in \mathbb{R}$ صدق کند، می‌دانیم که برای $t \in [0, T]$ و فرآیند وینر داده‌شده $X = \{X_t, t \geq 0\}$ حل صریح معادله به شکل

$$X_t = X_0 + \exp\left(\left(a - \frac{1}{2}b^2\right)t + bW_t\right), \quad (16)$$

می‌باشد. در معادله (2-3) $a \wedge b$ اعداد حقیقی هستند. برای $X_0 \neq 0$ همراه با احتمال ۱، تعریف می‌کنیم اوسط پایداری مربعی را:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E[X_t^2] = 0,$$

بنابراین، به راحتی می‌توان تأیید کرد که برای آزمون خطی معادله‌هایی (15) و (16) معادل است که بگوییم $a \wedge b$ از معادله (15) رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\operatorname{Re}(a) + 1/2|b|^2 < 0. \quad (17)$$

برای $X_0 \neq 0$ همراه با احتمال ۱، تعریف می‌کنیم پایدارمجانگی را:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E[X_t^2] = 0,$$

به‌طور مشابه، به راحتی می‌توان تأیید کرد که برای آزمون خطی معادله‌هایی (15) و (16) معادل است که بگوییم $a \wedge b$ از معادله (15) رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\operatorname{Re}(a - 1/2b^2) < 0. \quad (18)$$

علاوه بر این، با نگاهی به هر دو رابطه (16) و (17)، واضح است که پایداری اوسط مربعی دلالت بر پایداری مجانبی دارد، اما نه برعکس. از طرف دیگر شکل حل رانگ کوتاه تصادفی مرتبه 4 و میلشتاین به ترتیب زیر می‌باشد:

$$Y_{n+1} = Y_n + aY_n\Delta_n + b\Delta W_n, \quad (19)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + aY_n\Delta_n + b\Delta W_n + \frac{1}{2}bb'\{(\Delta W_n)^2 - \Delta_n\}, \quad (20)$$

اکنون که دیدیم برای معادله (17) برای پایداری اوسط مربعی و پایدار مجانبی چه شرایطی لازم است، ما علاقه‌مند به یافتن شرایطی هستیم که اطمینان حاصل شود که روش‌های عددی نیز پایدار هستند. از آنجایی که روش‌های صریح معمولاً ناپایدارتر از روش‌های ضمنی هستند، ما فقط بر تحلیل پایداری روش‌های صریح تمرکز خواهیم کرد. از معادله‌ی دیفرانسیل معمولی به یاد بیاورید که برای این که یک روش عددی پایدار باشد، هم معادله‌ی دیفرانسیل و هم روش عددی باید پایدار باشند. این همین امر برای معادلات دیفرانسیل تصادفی نیز صدق می‌کند. بنابراین، اکنون فرض می‌کنیم که a و b به گونه‌ای هستند که حل (15) اوسط مجانبی و پایدار است. با اعمال روش صریح رانگ کوتاه تصادفی مرتبه 4

(18) به معادله (15) و با استفاده از ویژگی‌های ساده مقدار مورد انتظار، شرط زیر را در a و b به دست می‌آوریم که روش رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ برای آن میانگین مربع پایدار است.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E[X_j^2] = 0 \Leftrightarrow |1 + a\Delta t|^2 + |b|^2 \Delta t < 1, \quad (21)$$

دریافت شرایطی که روش رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ پایدار مجانبی است، مستلزم اعمال قانون قوی اعداد بزرگ و قانون لگاریتم تکراری است که منجر به شرط زیر می‌شود:

$$E\left[\log\left|1 + a\Delta t + b\sqrt{\Delta t}N(0.1)\right|\right] < 0. \quad (22)$$

$\Leftrightarrow$ با احتمال ۱

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E[X_j^2] = 0$$

مشابه کاری که برای روش رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ انجام دادیم، روش صریح ملشتاین را برای معادله (16) اعمال می‌کنیم و با استفاده از ویژگی‌های ساده مقدار مورد انتظار را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E[X_j^2] = 0 \Leftrightarrow |1 + a\Delta t|^2 + |b|^2 \Delta t < 1, \quad (23)$$

که همان شرایطی است که در روش رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ وجود دارد. برای اینکه روش ملشتاین مجانبی پایدار باشد، شرط زیر باید برقرار باشد:

$$E\left[\log\left|1 + a\Delta t + b\sqrt{\Delta t}N(0.1) + \frac{1}{2}b^2\sqrt{\Delta t}N(0.1)\right|\right] < 0. \quad (24)$$

$\Leftrightarrow$ با احتمال ۱

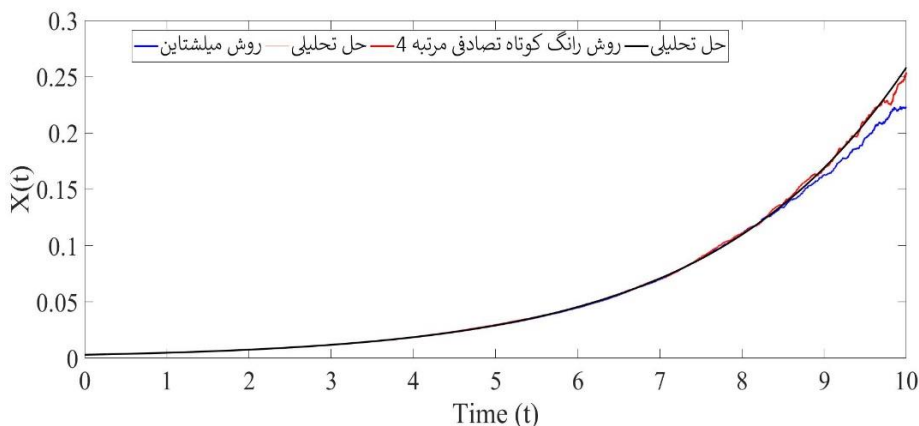
اکنون، روش‌های رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ (13) و ملشتاین (13) را برای

مدل دارایی بلک شولز (۵) اعمال می‌کنیم. گدهای متلب مورد استفاده برای آزمایش‌های عددی انجام شده در این بخش بر اساس گدهای استفاده شده در (Ikeda & Watanabe, 2014) هستند اما برای معادله بلک شولز اصلاح شده‌اند. حرکت براونی همان‌طور که در

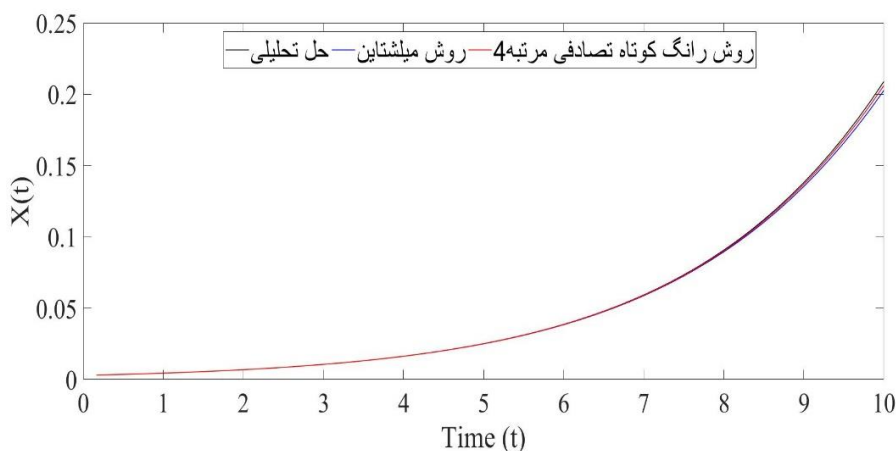
(Capasso & Capasso, 2021). بحث شد، یعنی $\Delta W(t) = \sqrt{\delta t}z_i$ گسسته شد. متغیرهای z_i

با استفاده از مولد شبه تصادفی توسط نرم افزار متلب محاسبه شدند که یک عدد شبه تصادفی مستقل از توزیع نورمال معیاری تولید می‌کند. برای تولید مسیرهای تصادفی، آرایه‌ای با ابعاد $1 \times N$ با

استفاده از $N(0.1)$ ایجاد کردیم و با $\sqrt{\delta t}$ مقیاس بندی شد. برای اینکه بتوان آزمایش‌ها را تکرار کرد، نرم‌افزار اجازه می‌دهد تا حالت اولیه مولد اعداد تصادفی را تنظیم کند. این بدان معنی است که با استفاده از همان حالت اولیه، همان دنباله شبه تصادفی ایجاد می‌شود. (شکل 1) جواب درست و تقریبی معادله (5) را با استفاده از روش‌های رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ و ملشتاین نشان می‌دهد. حرکت براونی در انتروال $[0, 1]$ نمونه برداری می‌شود و به ترتیب دارای گام زمانی $\Delta t = 2^{-12}$ است، درحالی‌که گام زمانی $\Delta t = 2^{-12}$ برای تقریب‌ها $X_0 = 0.5, a = 2 \wedge b = 1$ است.



شکل (۱): حل تحلیلی و حل های تقریبی رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ و میلشتاین برای معادله ی تصادفی.



شکل (۲): حل تحلیلی و حل های تقریبی رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ و میلشتاین برای معادله ی معمولی.

اکنون هدف ما تأیید تجربی ترتیب همگرایی این روش های عددی است. برای آزمایش مقاربت قوی، فواصل فاصله را برای حرکت براونی تعیین می کنیم و از هشت متفاوت استفاده می کنیم. حرکت براونی در انتروال $[0,1]$ نمونه برداری می شود و به ترتیب دارای گام زمانی $\Delta t = 2^{-12}$ است، درحالی که گام زمانی $\Delta t = 2^{-12}$ برای تقریب ها $a = 2$ و $b = 1$ ، $X_0 = 0.5$ است. از آنجایی که محاسبه مقاربت قوی از نظر محاسباتی سنگین است، زیرا باید کل مسیر و نه فقط نقطه پایان را ذخیره کند، ما فقط بیش از 5000 مسیر را نمونه برداری می کنیم. برای حل واقعی از معادله (3) استفاده کردیم و آن را برای هر مسیر تصادفی محاسبه کردیم. خطاها در زمان اخیر مانند T از معادله زیر محاسبه می شود:

$$e_{\Delta t}^{strong} := E \left[\left| X(T) - \tilde{X}(T) \right| \right],$$

در معادله بالا $\tilde{X}(T)$ تقریب $X(T)$ در زمان $t=T$ و Δt گام‌هایی زمانی است.

جدول ۱: مقایسه قوی روش‌های رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ و میلشتاین برای معادلات دیفرانسیل معمولی

شماره	Δt	خطای رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴	خطای میلشتاین
۱	2^{-4}	۰,۳۲۶۶	۱,۳۲۴۵
۲	2^{-6}	۰,۴۰۵۸	۰,۶۰۴۴
۳	2^{-8}	۰,۰۲۲۸	۰,۱۲۳۱
۴	2^{-10}	۰,۰۲۷۲	۰,۰۴۶۲
۵	2^{-12}	۰,۰۰۴۴	۰,۰۱۲۲

جدول ۲: مقایسه قوی روش‌های رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴ و میلشتاین برای معادلات دیفرانسیل تصادفی

شماره	Δt	خطای رانگ کوتاه تصادفی مرتبه ۴	خطای میلشتاین
۱	2^{-4}	۰,۱۶۸۳	۰,۲۴۸۳
۲	2^{-6}	۰,۰۷۲۱	۰,۱۱۴۴
۳	2^{-8}	۰,۰۶۲۸	۰,۱۱۰۱
۴	2^{-10}	۰,۰۱۶۲	۰,۰۳۵۲
۵	2^{-12}	۰,۰۱۰۰	۰,۰۱۰۲

نتیجه‌گیری

برای این‌که معادلات دیفرانسیل تصادفی مرتبه اول حل تحلیلی ندارد، ناگزیریم که از حل عددی برای حل این نوع معادلات کار گیریم. نتایج در مورد روش‌ها نشان می‌دهد که میل خط مساوی به 1,0 یعنی $\Delta t = 2^{-12}$ هم‌چنین در مورد روش میلشتاین هویداست، که میل خط مساوی به 1,5 می‌باشد. به عبارت دیگر شکل‌های بالا تأییدی براین مطلب می‌باشد که مرتبه تقارب قوی روش رانگ کوتاه تصادفی مرتبه 4، 1,5 و از روش میلشتاین ۱ می‌باشد. برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی در بین این دو روش، روش بهتر میلشتاین می‌باشد، زیرا خطای این روش کم است.

منابع

- Arifah, B and Mao, X. (2004). Stochastic delay population dynamics. *International Journal of Pure And Applied Mathematics.*, 11, 377-400.
- Ayoubi T. (2015). Stochastic modelling of time delay for solvent production by *Clostridium Acetobutylicum* P262 (Master dissertation, UMP).
- Bastani, A. F., and Hosseini, S. M. (2007). A new adaptive Runge–Kutta method for stochastic differential equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 206(2), 631-644.
- Capasso, V., and Capasso, V. (2021). *Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes*. Springer International Publishing.
- Burrage, K., and Burrage, P. M. (1996). High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 22(1-3), 81-101.
- Burrage, K., Burrage, P. M., and Tian, T. (2004). Numerical methods for strong solutions of stochastic differential equations: an overview. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 460(2041), 373-402.
- Braumann, C. A. (2019). *Introduction to stochastic differential equations with applications to modelling in biology and finance*. John Wiley and Sons.
- Bradford, E., and Imsland, L. (2019). Stochastic nonlinear model predictive control of a batch fermentation process. In *Computer Aided Chemical Engineering* (Vol. 46, pp. 1237-1242). Elsevier.
- Chang, C. C. (1987). Numerical solution of stochastic differential equations with constant diffusion coefficients. *Mathematics of computation*, 49(180), 523-542.
- Higham, D. J. (2001). An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM review*, 43(3), 525-546.
- Ikeda, N., and Watanabe, S. (2014). *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Elsevier.
- Jia, J., and Benson, A. R. (2019). Neural jump stochastic differential equations. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 32.
- Kostrista, E., and Çibuku, D. (2018). Introduction to Stochastic Differential Equations. *Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT*, 3(5-6), 189-195.
- Kloeden, P. E. and Platen, E. *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations. Applications of Mathematics* 23, Springer-Verlag, Berlin; 1995.
- Kloeden, P. E., Platen, E., Kloeden, P. E., and Platen, E. (1995). *Stochastic differential equations. Applications of Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin.
- Kloeden, P. E. and Platen, E., Schurz, H. (1995). *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations. Through Computer Experiments* 23, Springer-Berlin.

- Kuo, H. H. (2006). Stochastic differential equations (pp. 185-230). Springer New York.
- Michelot, T., Glennie, R., Harris, C., Thomas, L. (2021). Varying-coefficient stochastic differential equations with applications in ecology. *Journal of Agricultural, Biological and Environmental Statistics*, 26, 446-463.
- Milstein, G. H. (1995). *Numerical Integration of Stochastic Differential Equations*, Kluwer, Dord Recht.
- Raissi, M. (2024). Forward-backward stochastic neural networks: deep learning of high-dimensional partial differential equations. In Peter Carr Gedenkschrift: Research Advances in Mathematical Finance (pp. 637-655).
- Rosli, N. (2012). *Stochastic Runge-Kutta Method for Stochastic Delay Differential Equations* (Doctoral dissertation, Universiti Teknologi Malaysia).
- Rößler, A. (2010). Runge-Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(3), 922-952.
- Rüemelin, W. (1982). Numerical treatment of stochastic differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(3), 604-613.
- Sharp, K. P. (1990). Stochastic differential equations in finance. *Applied mathematics and Computation*, 37(2), 131-148.
- Sobczyk, K. (2013). *Stochastic differential equations: with applications to physics and engineering* (Vol. 40). Springer Science and Business Media.
- Yang, L., Gao, T., Lu, Y., Duan, J., and Liu, T. (2023). Neural network stochastic differential equation models with applications to financial data forecasting. *Applied Mathematical Modelling*, 115, 279-299



Two quarterly

Ainak Academic- Research Journal

Logar Higher Education Institute

Journal license date: June/2023



Error analysis of stochastic Rang-Kutta and Milstein numerical methods

Tawfiqallah Ayubi

Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Kabul Education University.

Kabul: Afghanistan. Email: tawfiqallah.ayoubi@yahoo.com

ABSTRACT

Statement of the problem: Most of the differential equations do not have an analytical solution, it is necessary to search for a solution to solve these equations.

The purpose of the research: In this research paper, Milstein's numerical methods, Runge-kutta has been investigated by comparing these two methods for solving stochastic differential equations.

Research method: We cannot use Riemann and Lebesgue integrals to calculate stochastic differential equations, because this mathematical model consists of an ordinary differential equation with Wiener process. To solve this problem, Itô integral is used.

Findings: The accuracy of these equations is determined by white noise, because white noise has infinite data that he randomly selects from these data during the mathematical process.

Conclusion: From this research, it appears that the best numerical method for solving stochastic differential equations is the short stochastic numerical method, because the error of this method is less than Milstein's numerical method.

Keywords: Itô integral, Stochastic differential equations, stochastic Range-Kuttah and Milstein, white noise.

Cite this article: Ayubi, Tawfiqallah.(2024). Error analysis of stochastic Rang-Kutta and Milstein numerical methods. Two scientific-research quarterly Ainak. 2(3): 1-19.

© The Author(s).

Logar Higher Education Institute
